

Discrétisation de type Différences Finies de l'Equation de Diffusion de la charge électrique à une dimension

NABADIATA MBALA Pierre

Chef de Travaux à l'Université Pédagogique Nationale

Résumé

L'article présente la discrétisation de type Différences Finies de l'Equation de Diffusion de la charge électrique à une dimension. L'intérêt de cet article est que les expériences simples portant sur la diffusion des particules sont plutôt rares [1]. La géométrie que présente le système électrique étudié ici est simple.

Le modèle mathématique du système sus-évoqué se présente sous la forme d'une équation différentielle qui lie la fonction inconnue à ses dérivées partielles (la charge électrique est fonction d'espace et de temps).

Donc, le système de diffusion de la charge électrique à une dimension est décrit par une équation différentielle partielle, appelée *Equation de diffusion de la charge*. C'est un problème différentiel ou *problème continu*. Sans perte de généralités, cette équation n'admet pas de solution analytique. Donc, il faudra la discrétiser.

Mots-clés : *Discrétisation – Différences Finies – Diffusion de la charge – Problème continu – Problème discret.*

Abstract: The article presents the Finite Difference type discretization of the Diffusion Equation of the electric charge in one dimension. The interest of this article is that simple experiments on particle diffusion are rather rare [1]. The geometry presented by the electrical system studied here is simple.

The mathematical model of the above-mentioned system is in the form of a differential equation which links the unknown function to its partial derivatives (the electric charge is a function of space and time).

Therefore, the one-dimensional electric charge diffusion system is described by a partial differential equation, called the Charge Diffusion Equation. This is a differential problem or continuous problem. Without loss of generality, this equation does not admit of an analytical solution. So, it will have to be discretized.

Keywords: Discretization – Finite Differences – Diffusion of the charge – Continuous problem – Discrete problem.

Introduction

Le contexte

Les expériences électriques portant sur la diffusion des particules et leur modélisation sont rares. On peut cependant citer le problème de diffusion thermique, ou la concentration pour un problème de diffusion de particules où la source thermique provient d'un phénomène de dissipation [2].

Toutain W. et *al.* [1] proposent un système simple permettant d'étudier la diffusion de charges électriques à une dimension. Ce système est formé de capacités et de résistances discrètes. Les particules diffusantes ici sont des électrons – des trous – portés par les armatures des condensateurs.

Le problème physique rencontré dans cette expérience électrique est décrit par une équation différentielle partielle ou équation aux dérivées partielles. Tout problème de type équation aux dérivées partielles – sauf s'il est simplifié - n'admet de solution analytique. Le problème est qualifié de continu. L'expérience [1] est présentée dans la section 1 de la première partie consacrée à la modélisation. Ensuite, la section 2 présente le modèle physico-mathématique de la diffusion de charge. La section 2 expose aussi la méthode des différences finies, son principe et le schéma aux différences explicite à une dimension. Enfin, dans la seconde partie, est présenté le résultat de la discrétisation de type différences finies de l'équation de diffusion de la charge électrique à une dimension suivie d'une discussion.

1. Modélisation du problème continu

1.1 Dispositif expérimental

Le système qui nous permet d'étudier la diffusion de charge électrique à une dimension est tiré de l'article publié dans le bulletin de l'union des professeurs de physique et de chimie [1]. Il est simple : une ligne de transmission dissipative faite de capacités et de résistances discrètes.

1.1.1 Matériels

- capacités : $C = 100 \text{ nF}$
- résistances : $R = 1,5 \text{ k}\Omega$
- plaques de plexiglas : épaisseur = 5 mm
- entretoises pour séparer les plaques de 25 mm
- forets de bois
- dimensions horizontales du montage : $8 \text{ cm} \times 46 \text{ cm}$
- pieds en caoutchouc

1.1.2 Montage

Nous reprenons *in extenso* le descriptif expérimental tiré de [1].

« Des capacités $C = 100 \text{ nF}$ alignées parallèlement, numérotées $p = 0, 1, 2, \dots, 20, 21$, sont liées d'un côté à la masse et de l'autre côté à la capacité voisine *via* une résistance $R = 1,5 \text{ k}\Omega$ (cf. figure 1a).

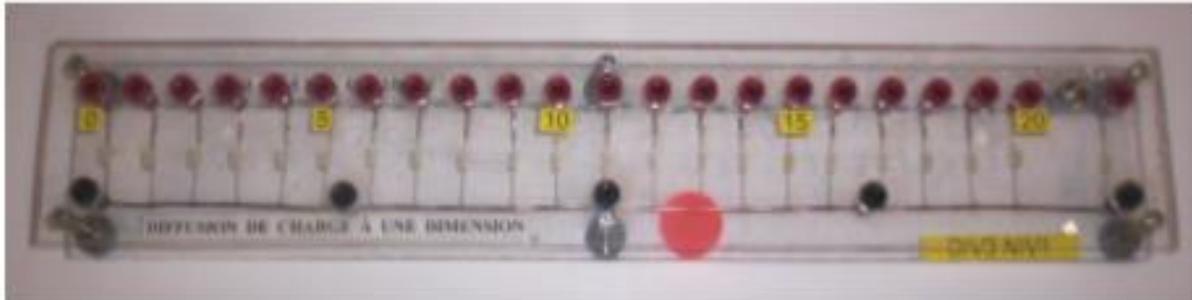


Figure 1a : Photographie du dispositif expérimental

Les composants employés sont ceux d'usage courant : les condensateurs sont à diélectrique en polyester, et les résistances sont à film métallique. Le montage expérimental est fabriqué entre deux plaques parallèles de plexiglas[®] d'épaisseur 5 mm , qui sont maintenues séparées de 25 mm par entretoises. Les trous nécessaires sont faits avec une perceuse sur colonne, en utilisant des forets à bois. Les dimensions horizontales du montage sont $8 \text{ cm} \times 46 \text{ cm}$. Des pieds en caoutchouc sont placés sous la plaque du dessous. Sur la plaque du dessus sont installés des prises bananes permettant les mesures des tensions $U_p = Q_p/C$ aux bornes de chaque capacité p portant la charge électrique Q_p . Entre les positions $p = 20$ et $p = 21$ est placé un interrupteur K (en série avec une résistance R) ».

2. Modèle physico-mathématique de la diffusion de charge

Le modèle physico-mathématique de la diffusion de charge qui sera défini dans la suite est une équation aux dérivées partielles, donc un problème continu qui n'admet pas de solution analytique. Le recours aux méthodes de résolution numériques s'avère nécessaire. Celles-ci comportent deux étapes : le maillage et la discrétisation.

Le maillage consiste à diviser le domaine d'étude en de petits morceaux, appelés ici des différences finies tandis que la discrétisation (section 2) transforme le problème continu en problème discret.

2.1 Maillage

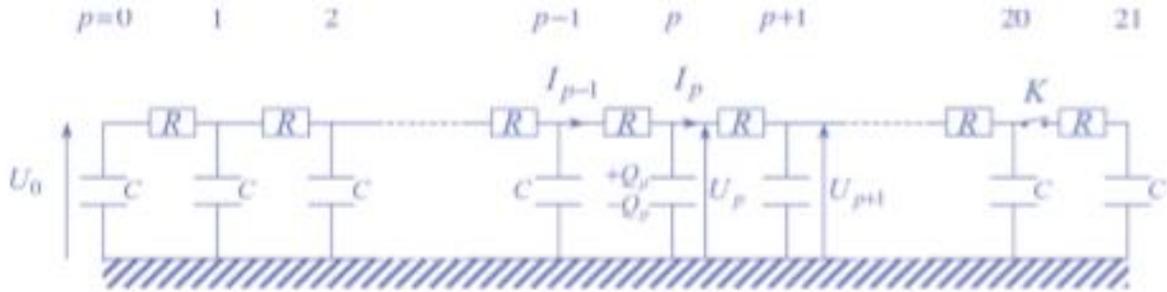


Figure 1b : Schéma électrique du dispositif expérimental ($C = 100 \text{ nF}$ et $R = 1,5 \text{ k}\Omega$).

Par la conservation de la charge électrique, la charge Q_p sur la $p^{\text{ième}}$ capacité est reliée aux intensités électriques I_p (vers la capacité suivante) et I_{p-1} (en provenance de la précédente) par :

$$dQ_p/dt = I_{p-1} - I_p \quad (1)$$

(cf. figure 1b, ci-haut). Par ailleurs, en utilisant la loi des mailles, l'intensité I_p du courant au travers de la résistance R liant la capacité p à la capacité $p + 1$ vaut :

$$I_p = (U_p - U_{p+1})/R,$$

soit

$$I_p = (Q_p - Q_{p+1})/\tau \quad (2)$$

où l'on a posé $\tau = RC = 150 \mu\text{s}$.

Cette valeur du temps caractéristique RC est issue de celles, nominales, des résistances R et capacités C du montage.

Afin de passer à la limite continue (qui se révèle satisfaisante), on écrit :

$$Q_p(t) = Q(x_p, t) \text{ et } I_p(t) = I(x_p, t), \quad (3)$$

avec

$x_p = pa$ ($a = 19 \text{ mm}$ dans le montage), et l'on ne conserve que les termes d'ordre 1 en a . Les deux équations (1) et (2) prennent ainsi la forme des équations aux dérivées partielles, $q(x, t) = Q(x, t)/a$ étant la charge électrique par unité de longueur :

$$\partial q/\partial t + \partial I/\partial x = 0 \tag{4}$$

et

$$I = -D \partial q/\partial x, \tag{5}$$

où intervient le coefficient de diffusivité $D = a^2/\tau$. Ces équations ont des formes continues : (4) exprime la continuité de la charge électrique, et (5), c'est une version de la loi de Fick pour les particules chargées. On est alors conduit à l'équation de diffusion de la charge :

$$\partial q/\partial t = D \partial^2 q/\partial x^2, \tag{6}$$

soit

$$\partial U/\partial t = D \partial^2 U/\partial x^2 \tag{7}$$

pour la tension $U(x_p, t) = U_p(t)$ accessible dans l'expérience (mesurer la tension $U_p(t)$ aux bornes de la capacité p , c'est mesurer sa charge $Q_p(t) = a q(x_p, t) = C U_p(t)$, *i.e.* y détecter $C U_p(t)/e$ charges élémentaires (où $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} C$).

L'équation (6) ou (7) de diffusion de la charge électrique est analogue à l'équation de chaleur à une dimension, suivie par la température dans un milieu de diffusivité thermique D . L'analogie entre ces deux problèmes de diffusion, de nature physique différente, a été remarquée il y a longtemps [3] et exploitée à une dimension [4] ou à deux dimensions [5].

2.2 Discrétisation

2.2.1 Principe des Méthodes de Différences Finies

On considère un domaine physique $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, où d est la dimension du domaine (ou espace). Le principe des méthodes de différences finies (DF) consiste à se donner un certain nombre de points du domaine qu'on notera $(x_1, \dots, x_N) \subset (\mathbb{R}^d)^N$. On approche l'opérateur différentiel en espace en chacun des x_i par des quotients différentiels. Il faut alors discrétiser la dérivée en temps : on pourra par exemple considérer un schéma d'Euler¹ [6].

Soit le problème de diffusion stationnaire à une dimension

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in]0; 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

où $f \in \mathcal{C}([0; 1])$. Les conditions aux limites (9) que nous considérons ici sont type Dirichlet² homogène, le terme homogène indiquant les conditions nulles. Cette équation modélise la

diffusion de la chaleur dans un barreau conducteur chauffé (terme source f) dont les deux extrémités sont plongées dans de la glace.

Subdivisons $[0; 1]$ en une suite de points $(x_k)_{k=0, \dots, N+1}$ tel que $0=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$ (cf. figure 2).

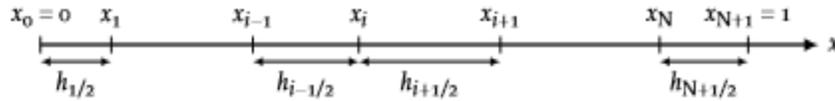


Figure 2 Maillage unidimensionnel en volumes finis

1. Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort le 7 septembre 1783 (18 septembre dans le calendrier grégorien) à Saint-Petersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. Il était notamment membre de l'académie royale des sciences de Prusse à Berlin.

2. Johann Peter Gustav Dirichlet, mathématicien allemand, né à Düren en 1805 et mort à Göttingen en 1859, a effectué ses études supérieures à Paris où il a côtoyé les plus grands mathématiciens français de l'époque, comme Legendre, Laplace, Poisson et Fourier. En Allemagne en 1825, il travaille en particulier avec son Jacobi et avec Gauss, dont il reprendra la chaire à l'Université de Göttingen où il eut entre autres comme élèves Riemann et Kronecker (qui a donné son nom au fameux symbole. Les travaux de Dirichlet ont surtout porté sur les séries de Fourier et l'arithmétique.

Pour $i = 0, \dots, N$, notons $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ et définissons le *pas* du maillage par :

$$h = \max h_{i+1/2}$$

Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons à un pas constant :

$$h_{i+1/2} = h \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Le principe de la méthode des différences finies consistera donc à écrire l'équation aux dérivées partielles (8) aux points de discrétisation x_i :

$$-u''(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

puis à approcher l'opérateur différentiel, dans notre cas $-u''$, par un quotient différentiel, tel que nous puissions en déduire un système d'équations en fonction d'inconnues discrètes supposées représenter des approximations de u aux points de discrétisation.

2.2.2 Schéma aux différences explicite

Effectuons d'abord un développement de Taylor³ en x_i , en supposant que $u \in \mathcal{C}^4([0; 1])$ [7]:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\zeta_i) \quad (10)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta_i) \quad (11)$$

avec $\zeta_i \in [x_i; x_{i+1}]$ et $\eta_i \in [x_{i-1}; x_i]$. En additionnant membre à membre les équations (10) et (11), nous obtenons :

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \mathcal{O}(h^2) \quad (12)$$

Il semble donc raisonnable d'approcher la dérivée seconde $-u''(x_i)$ par le *quotient différentiel* :

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2} \quad (13)$$

Sous des hypothèses de régularité sur u , on peut montrer que cette approximation est d'ordre 2 au sens :

$$R_i = u''(x_i) + \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1}))}{h^2} = \mathcal{O}(h^2) \quad (14)$$

3. Brook Taylor est un homme de science anglais, né à Edmonton, aujourd'hui un quartier de Londres, le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Principalement connu comme mathématicien, il s'intéressa aussi à la musique, à la peinture et à la religion.

La quantité R_i est appelée *erreur de consistance* au point x_i . En approximant $u''(x_i)$ par un quotient différentiel, on nous suggère de considérer les équations discrètes suivantes :

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

dont les inconnues discrètes sont les u_i , $i = 1, \dots, N$. On notera que la première fait intervenir u_0 tandis que la dernière fait intervenir u_{N+1} . A proprement parler, u_0 et u_{N+1} ne sont pas des inconnues, puisqu'elles sont données comme des conditions aux limites (9). Posons donc $u_0 = 0$ et $u_{N+1} = 0$. Ainsi donc, la méthode des différences finies, basée sur un schéma centré d'ordre 2, nous conduit à résoudre, dans le cas du Laplacien avec conditions de Dirichlet, le système complet d'équations :

$$\begin{cases} \frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) & i = 1, \dots, N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

3. Résultat de la discrétisation et discussion

3.1 Résultat

Pour l'équation de diffusion de la charge (6) ou (7) :

$$\partial q / \partial t = D \partial^2 q / \partial x^2$$

soit

$$\partial U / \partial t = D \partial^2 U / \partial x^2,$$

on utilise un schéma explicite centré en espace :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (17)$$

En développant u_i^{n+1} et u_i^n par développement de Taylor, soustrayant et divisant le tout par Δt , on retrouve l'erreur de troncature sur le temps, $\mathcal{O}(\Delta t)$. En suivant le même principe avec le terme sur l'espace, on trouve une erreur en $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Finalement, en substituant l'équation (17) dans (6) ou (7), *i.e.* approcher

$$\partial q / \partial t \quad \text{par} \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

et

$$-D \partial^2 q / \partial x^2 \quad \text{par} \quad -\frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

on trouve :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + E.T \quad (18)$$

où E.T est l'erreur de troncature. L'ordre de l'E.T est $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$.

En choisissant le profil linéaire, la discrétisation de type Différences Finies avec un schéma d'Euler explicite centré d'ordre 2, donne un système linéaire.

En effet,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{\alpha}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0 \quad (19)$$

soit

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (20)$$

En posant $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \lambda$, il vient :

$$u_i^{n+1} = \lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n \quad (21)$$

Après arrangement, la méthode des différences finies (MDF), basée sur un schéma d'Euler explicite centré d'ordre 2, conduit à résoudre, dans le cas du Laplacien avec les conditions de Dirichlet, système linéaire :

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + u_{i+1}^n \quad (22)$$

3.2 Discussion

Le résultat obtenu représente une équation algébrique indicielle reliant l'inconnue (ici la tension u_i^n) au point principal « p_i » aux inconnues u_{i-1}^n (resp. u_{i+1}^n) aux points voisins p_{i-1} (resp. p_{i+1}).

Cette équation algébrique résultant de la discrétisation de type Différences Finies de l'équation de diffusion de la charge électrique à une dimension, présente donc un système linéaire pouvant être écrit sous forme matricielle $[A][X] = [B]$ qui est résolue par des méthodes directes et itératives telles que la *méthode d'élimination de Gauss*⁴ et la *méthode Gauss-Seidel*⁵, respectivement.

Un schéma aux différences finies utilisé ici est consistant si :

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} E.T = 0$$

Des problèmes peuvent se poser si l'erreur de troncature varie comme $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Dans ce cas, on est obligé de raffiner de sorte que $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$.

4. Johann Carl Friedrich Gauß, traditionnellement traduit Gauss en français, Carolus Fridericus Gauss en latin, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

5. La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative pour résoudre les systèmes linéaires $Ax = b$ où A est une matrice carré d'ordre n et x, b sont des vecteurs de \mathbb{R}^n . Si A est matrice symétrique définie positive, ou si A est une matrice diagonale strictement dominante, alors pour tout choix de $x^0 \in \mathbb{R}^n$, la suite (x^k) converge vers l'unique solution de $Ax = b$.

Conclusion

Nous avons discrétisé l'équation de diffusion de la charge électrique à une dimension en utilisant le schéma aux différences explicite. Le schéma utilisé est *consistant* car le résultat de la discrétisation approche ou approxime bien le problème continu qui est la diffusion de charge. L'expérience électrique utilisée ici, portant sur la diffusion de charge, est inspirée par Toutain W. et *al.*, (2012).

L'équation algébrique indicielle trouvée ainsi pourrait bien être mise sous forme matricielle tridiagonale, puis résolue par des méthodes directes ou itératives, à savoir la méthode d'élimination de Gauss et la méthode de Gauss-Seidel, respectivement.

Références

- [1] Toutain W. et *al.*, 2012, Diffusion de charge électrique à une dimension, *Bulletin des Professeurs de Physique et de Chimie*, Vol. 106, p 525 – 527
- [2] Legrand F., s.d., Equation de diffusion à une dimension, *licence Creative Commons*, p. 1 – 2.
- [3] Rocard Y., 1967, *Thermodynamique*, Partie VII-I : Le transfert de la chaleur, 2^{ème} édition, Paris, Masson, p. 523 à 525
- [4] Morris D.A., 1968, “ Demonstration experiment of heat flow in transient and steady-state conditions “, *Am.J.Phys.*, 36, p.120
- [5] Steere R.C., 1971, “Solution of two-dimensional transient heat-flow problems by electrical analogue”, *Phys. Educ.*, 6, p.443
- [6] Herbin R., 1989, Mathématiques Master 2, Différences finies et volumes finis pour les problèmes de diffusion stationnaires, p. 1 – 12, <http://www.ctes.univ-provence.fr>